

# PRETHODNO NAPREGNUTE KONSTRUKCIJE

---

**Predavanja  
2019/2020**

**PII – Uticaji od PN**

**Prof. dr Radmila Sinđić-Grebović**

# UTICAJI U KONSTRUKCIJAMA IZAZVANI PRETHODNIM NAPREZANJEM

---

## Ekvivalentna opterećenja

Prethodno naprezanje izaziva unutrašnja opterećenja u konstrukciji.

Ekvivalentno opterećenje se određuje iz uslova da može zamijeniti unutrašnje opterećenje izazvano prethodnim naprežanjem.

Efekti prethodnog naprežanja (sile u presjecima i druga dejstva) predstavljaju dejstva ekvivalentnog opterećenja kao spoljašnjeg opterećenja.

Analiza uticaja od prethodnog naprežanja vrši se uz sljedeće uprošćenje:

**Usvaja se pretpostavka da je sila prethodnog naprežanja konstantna po dužini kabla, kao i tokom vremena.**

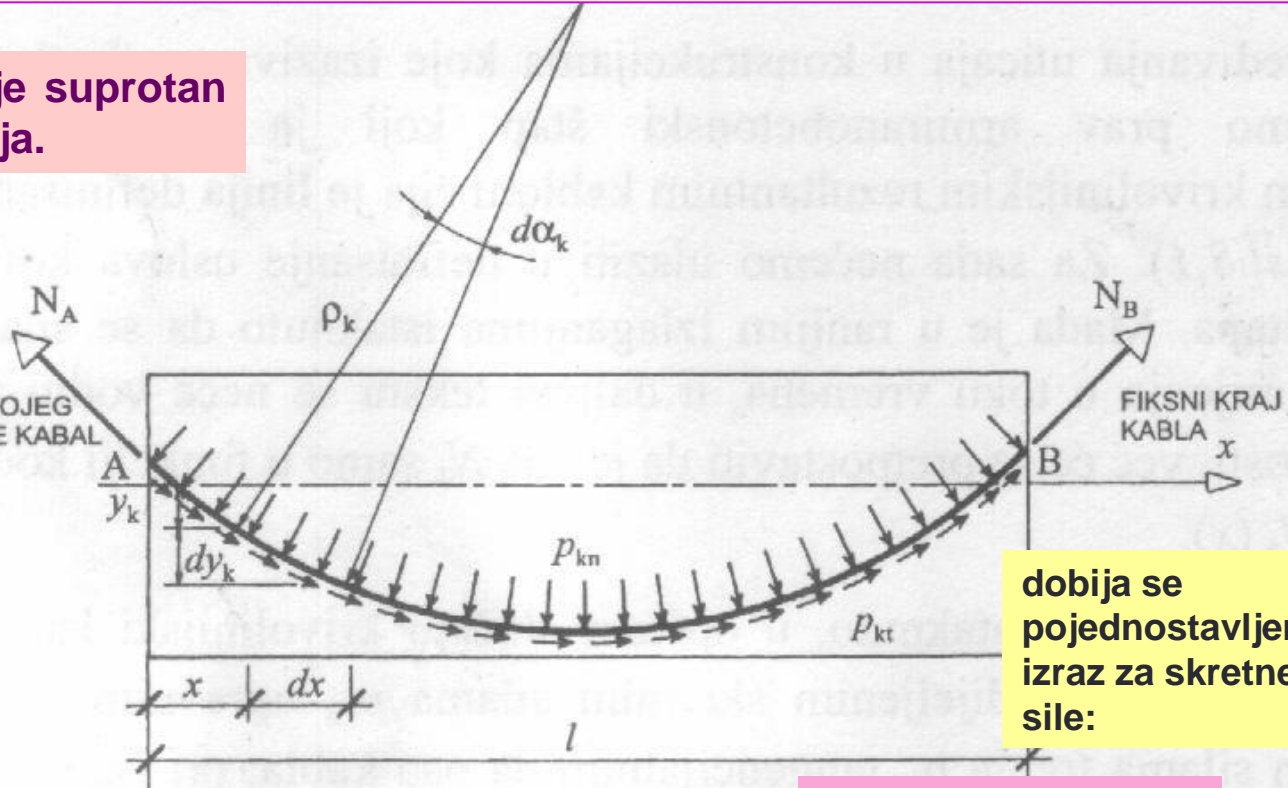
**Osnovna dejstva od zategnutih kablova:**

- ✓ Koncentrisane sile na mjestu kotve;
- ✓ Koncentrisane skretne sile na mjestu oštrog preloma trase kablova;
- ✓ Podijeljeno skretno opterećenja kod krivolinijske trase u pravcu poluprečnika krivine.

# Dejstva kabla na betonski element

Krivolinijski kabl djeluje na betonski dio nosača skretnim silama  $p_{kn}$  i silama trenja  $p_{kt}$ .

Smjer sile trenja je suprotan od smjera zatezanja.



Koristeći zavisnost

$$p_{kn} = -\frac{N_k}{\rho_k}$$

dobija se pojednostavljen izraz za skretne sile:

izraz za poluprečnik krivine kabla

$$\frac{1}{\rho_k} = \frac{\frac{d^2 y_k}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy_k}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Izvor: R.Pejović, 1999.

$$p_{kn} \approx -N_k \frac{d^2 y_k}{dx^2} \tag{1}$$

i pretpostavku da je trasa kabla dovoljno plitka da se može usvojiti

$$\left(\frac{dy_k}{dx}\right)^2 \approx 0$$

**Sile kojim kabl djeluje na betonski element, redukovane na osovину štapa:**

$$p_{kx} = p_{kn} \sin \alpha_k - p_{kt} \cos \alpha_k \quad (2)$$

$$p_{ky} = p_{kn} \cos \alpha_k + p_{kt} \sin \alpha_k \quad (3)$$

**Koristeći izraze (2) i (3) i jednakosti:**

$$\operatorname{tg} \alpha_k = \frac{dy_k}{dx}$$

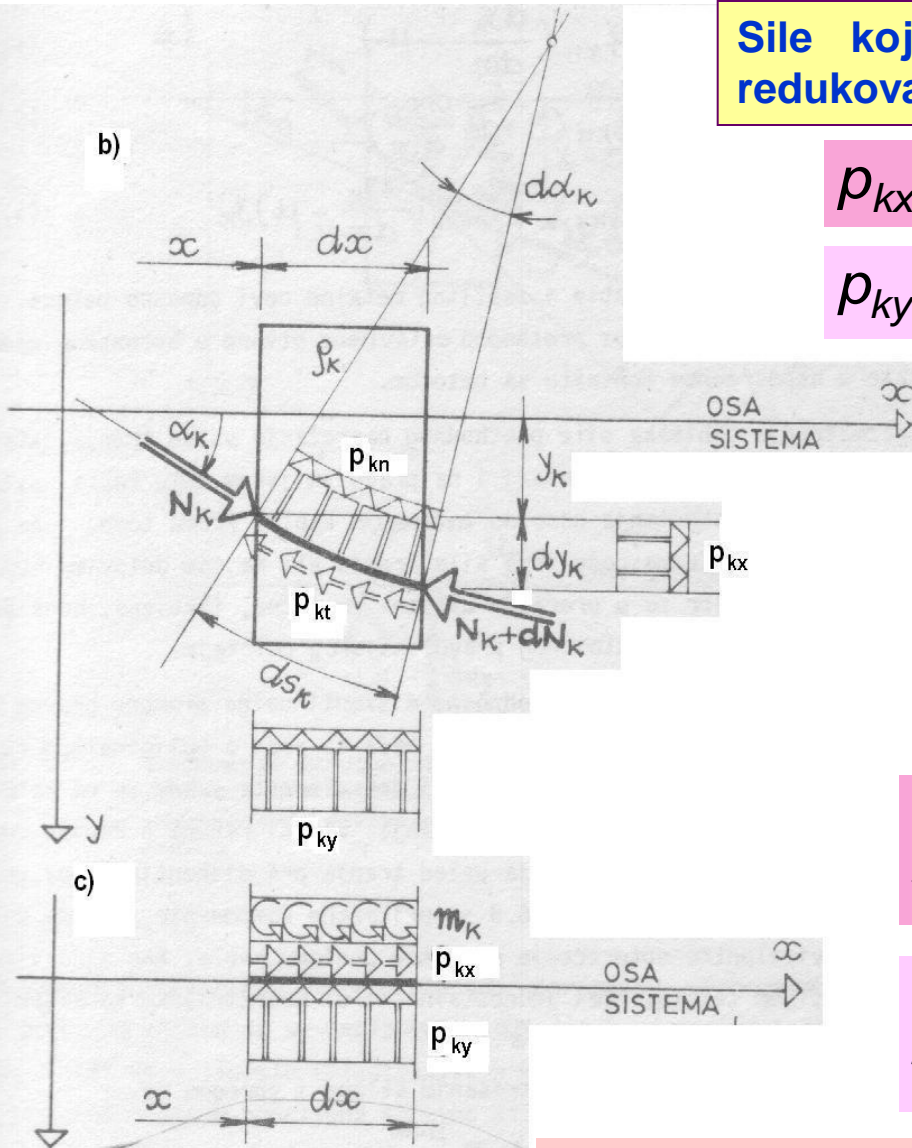
$$\cos \alpha_k \approx 1.0$$

**Dobija se:**

$$p_{kx} = p_{kn} \frac{dy_k}{dx} - p_{kt} \quad (4)$$

$$p_{ky} = p_{kn} + p_{kt} \frac{dy_k}{dx} \quad (5)$$

$$m_k = p_{kx} \cdot y_k = \left( p_{kn} \frac{dy_k}{dx} - p_{kt} \right) y_k \quad (6)$$



Izvor: M. Ačić, A. Pakvor, Ž. Perišić, 1983.

Ako se usvoji jednakost:  $p_{kn} \approx p_k$  i zanemari  $p_{kt}$

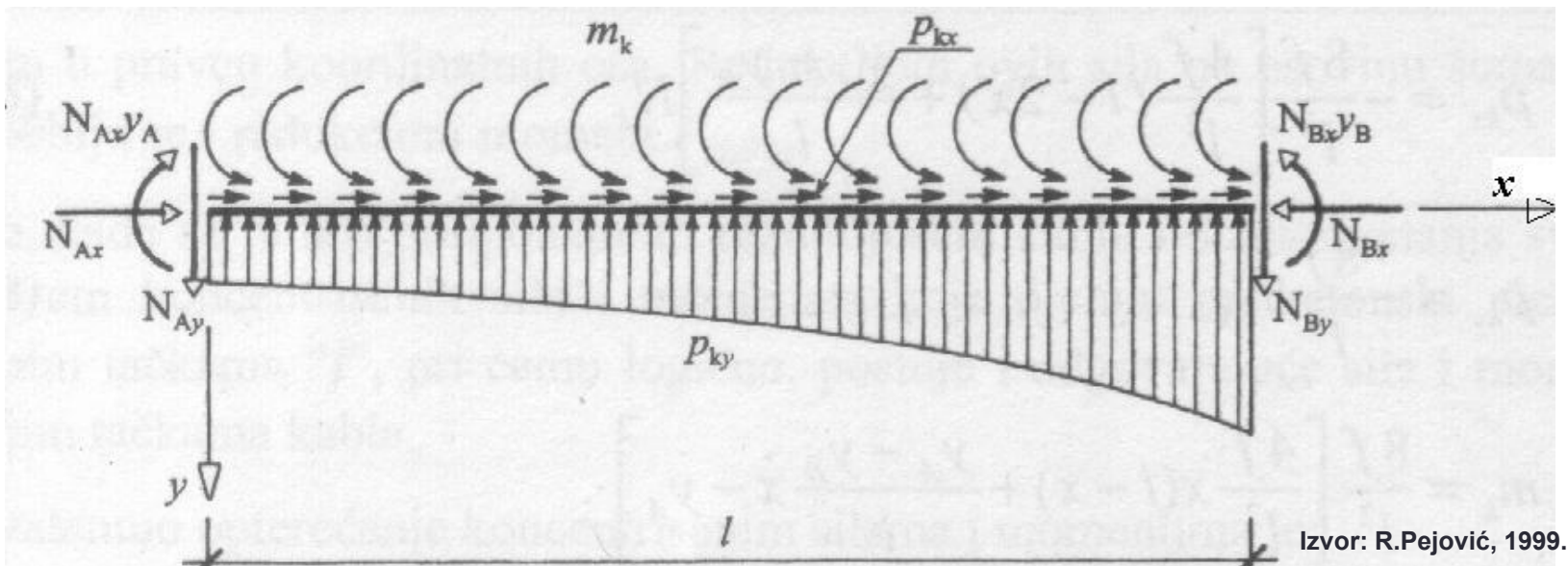
iz izraza (4), (5) i (6) dobijaju se izrazi za ekvivalentno opterećenje štapa:

$$p_{kx} \approx p_k \frac{dy_k}{dx} \quad (7)$$

$$p_{ky} \approx p_k \quad (8)$$

$$m_k = p_k y_k \frac{dy_k}{dx} \quad (9)$$

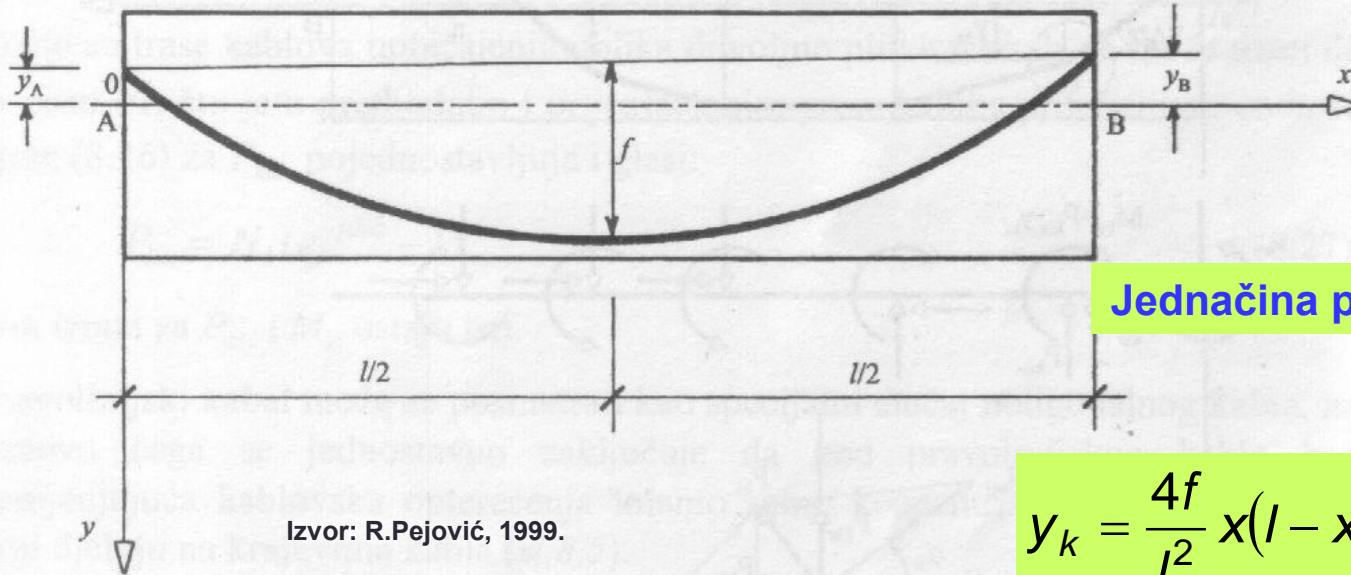
Ekvivalentno opterećenje štapa AB



Izvor: R.Pejović, 1999.

Opterećenja  $p_{kx}$ ,  $p_{ky}$  i  $m_k$  sa koncentrisanim silama  $N_A$  i  $N_B$  čine sistem sila koje stoje u ravnoteži.

# Ekvivalentno opterećenje u slučaju parabolične trase kabela



Jednačina parabolične trase kabela:

$$y_k = \frac{4f}{l^2} x(l-x) + \frac{y_A - y_B}{l} x - y_A \quad (10)$$

Diferenciranjem jednačine trase dobija se:

$$\frac{dy_k}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l-2x) + \frac{y_A - y_B}{l} \quad (11)$$

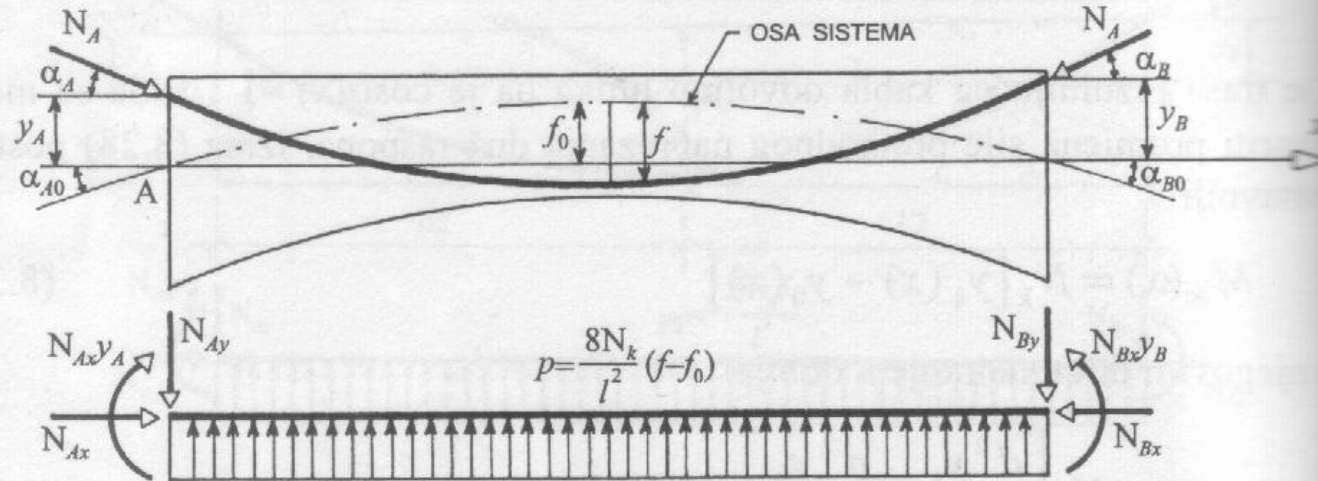
$$\frac{d^2 y_k}{dx^2} = -\frac{8f}{l^2} \quad (12)$$

Korišćenjem izraza (1), (8) i (12) dobija se izraz za ekvivalentno opterećenje  $p_{ky}$

$$p_{ky} = -\frac{8f}{l^2} N_k$$

Opterećenja  $p_{kx}$  i  $m_k$  se zanemaruju ukoliko se usvoji pretpostavka da je sila prethodnog naprezanja konstantna duž kabela.

# Ekvivalentno opterećenje za nosač sa paraboličnom osom i paraboličnom trasom kabla



Za simetričan sistem:

Izvor: R.Pejović, 1999.

Ekvivalentno opterećenje:

Jednačina parabolične trase kabla:

$$y_k = \frac{4f}{l^2} x(l - x)$$

$$p = -N_k \frac{8}{l^2} (f - f_0)$$

Jednačina parabolične ose nosača:

$$y_0 = \frac{4f_0}{l^2} x(l - x)$$

Koncentrisane sile na krajevima

$$N_{Ax} = N_A (\cos \alpha_A - \cos \alpha_{A0})$$

$$N_{Ay} = N_A (\sin \alpha_A - \sin \alpha_{A0})$$

$$M_A = N_{Ax} y_A$$



# Statički određeni sistemi

➤ Kod **statički određenih sistema** unutrašnja opterećenja ne izazivaju reakcije oslonaca.

Za statički određen štap izložen dejstvu ekvivalentnog opterećenja, presječne sile  $M$ ,  $T$  i  $N$  su date izrazima:

$$N = N_{kx} = N_k \cos \alpha_k$$

$$T = N_{ky} = N_k \sin \alpha_k$$

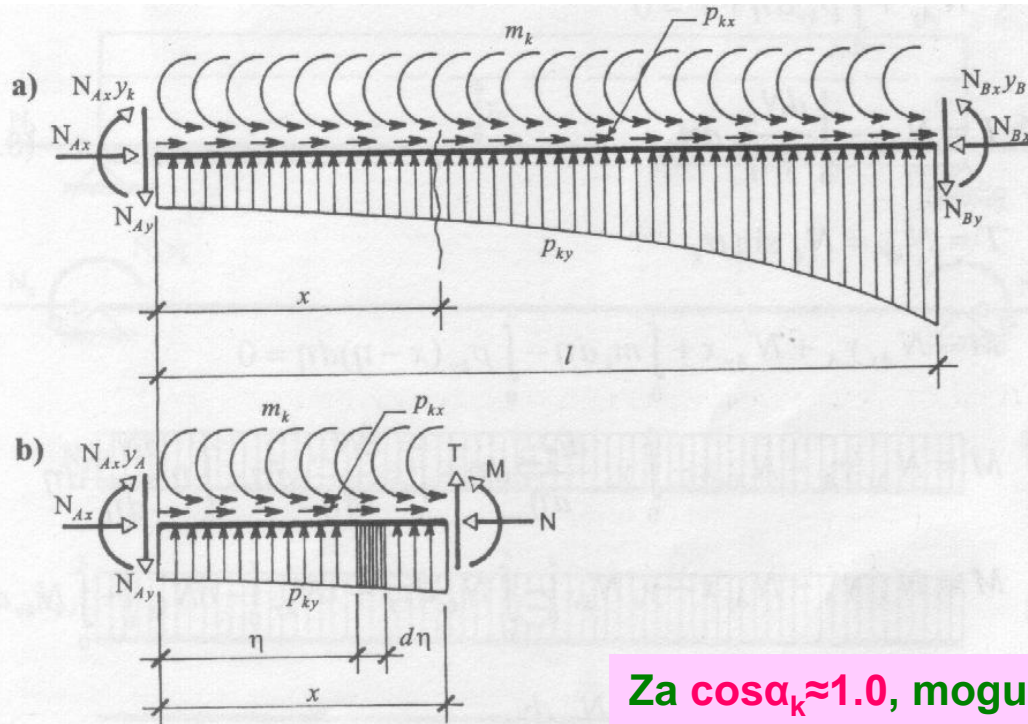
$$M = N_{kx} y_k = N_k y_k \cos \alpha_k$$

Za  $\cos \alpha_k \approx 1.0$ , mogu se u proračunu koristiti vrijednosti:

$$N \approx N_k(x)$$

$$T \approx N_k(x) \sin \alpha_k$$

$$M \approx N_k(x) y_k$$



Izvor: R.Pejović, 1999.

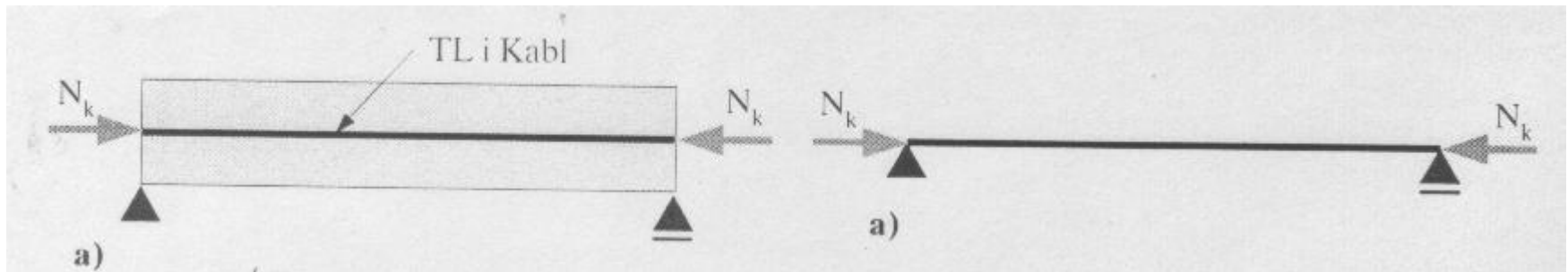
Ako se zanemari uticaj promjene sile prethodnog naprezanja po dužini kabela, ekvivalentno opterećenje će sačinjavati:

✓jednako podijeljeno opterećenje  $p_{ky} \approx p_k$  i koncentrisane skretne sile  $P_{kiy} \approx P_{ki}$

✓koncentrisana opterećenja na krajevima nosača (sile  $N_{kx}$ ,  $N_{ky}$  i momenti  $N_{kx}y_k$ )

Dato je nekoliko primjera ekvivalentnog opterećenja proste grede za različite oblike trase rezultujućeg kabela.

Trasa kabela je pravolinijska i poklapa se sa težišnom linijom grede

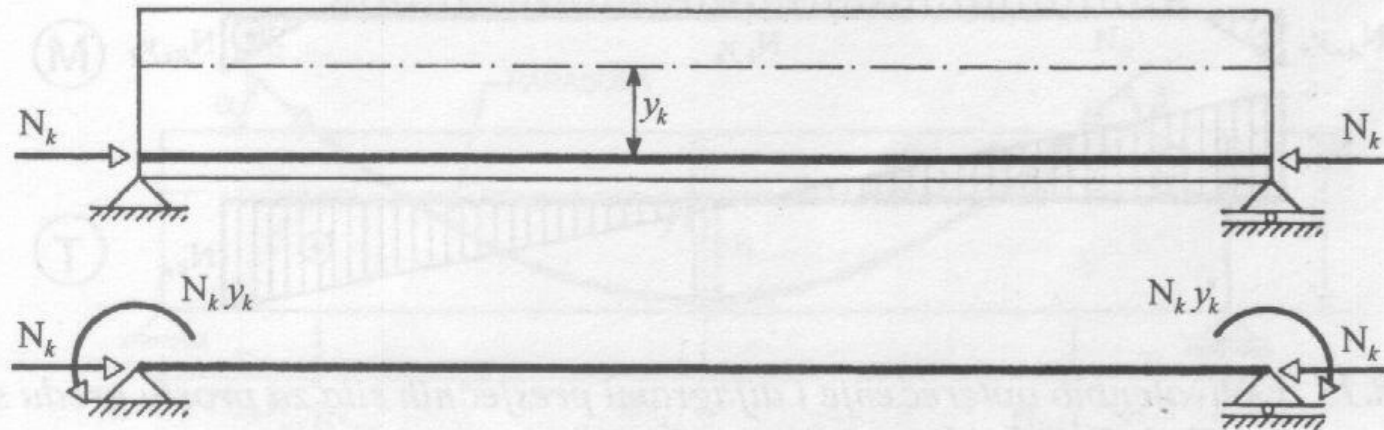


Nosač i trasa kablova

Izvor: V.Alendar, 2003.

Ekvivalentno opterećenje

Trasa kabela je pravolinijska i ima ekscentricitet  $y_k$  u odnosu na težišnu liniju grede



(N)  $N = N_k$

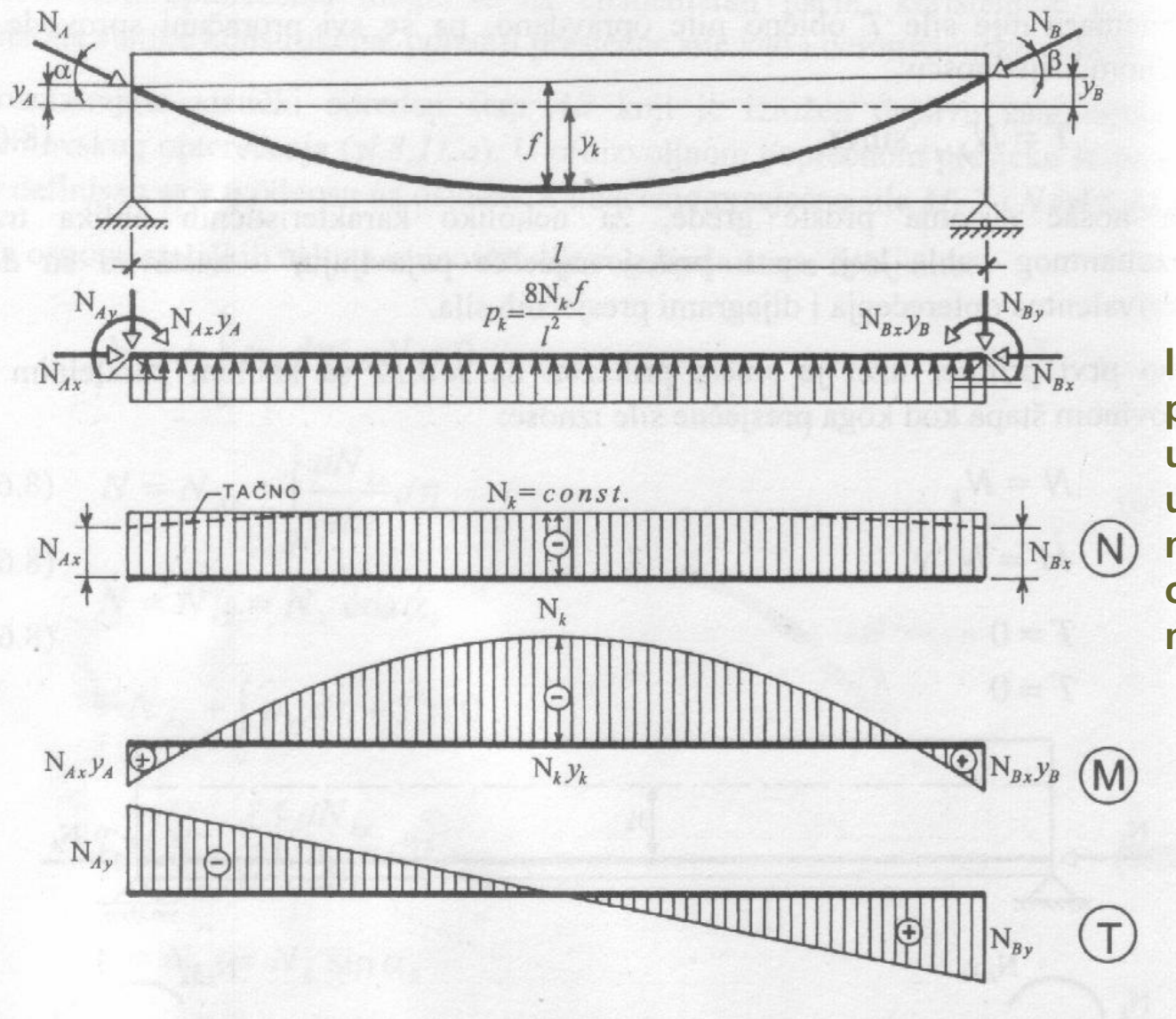


(M)  $M = N_k y_k$



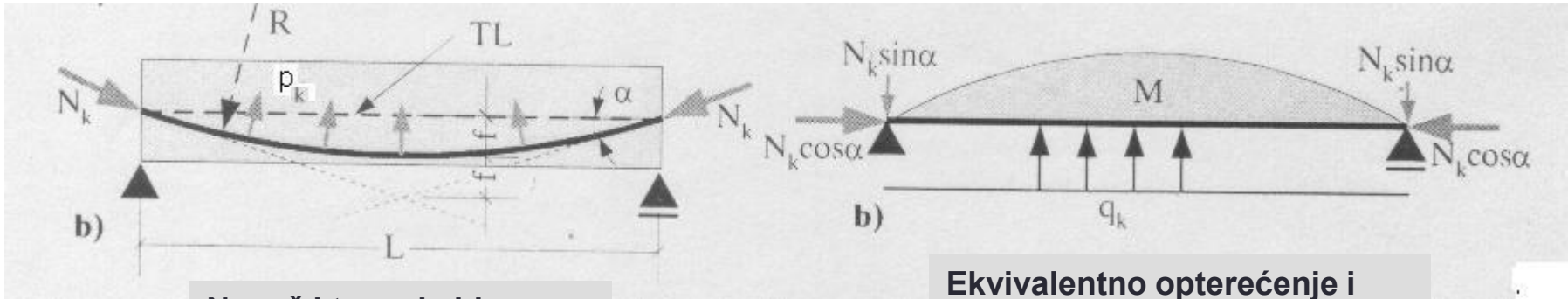
(T)  $T = 0$

**Parabolična nesimetrična trasa kabla (u opštem slučaju), sa ankerskim tačkama izvan težišta presjeka**



Isprekidanom linijom je prikazana normalna sila u nosaču ukoliko se uzme u obzir uticaj nagiba kablova u odnosu na podužnu osu nosača.

**Parabolična trasa kabela sa simetričnim kablom sa ankernim tačkama u težištima presjeka na oba kraja nosača**

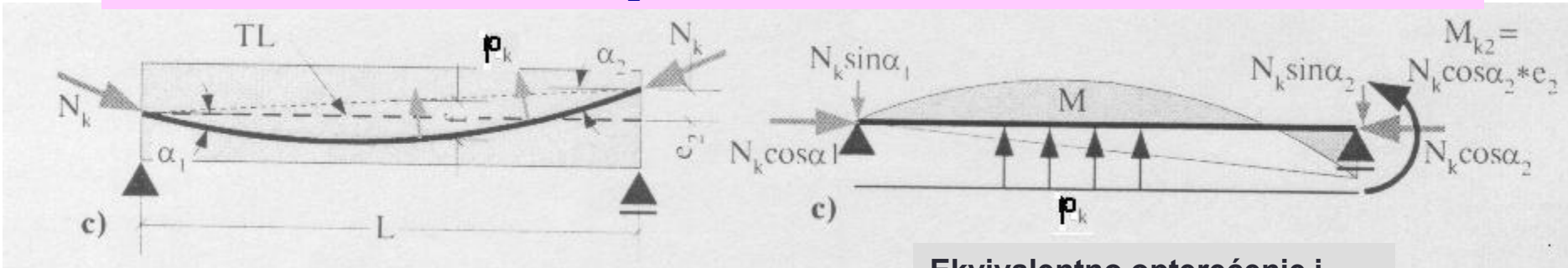


Nosač i trasa kablova

Izvor: V.Alendar, 2003.

Ekvivalentno opterećenje i dijagram momenata savijanja

**Parabolična trasa kabela sa nesimetričnim kablom sa ankernom tačkom u težištu presjeka na jednom kraju, i izvan težišta presjeka na drugom kraju nosača (sa ekscentricitetom  $e_2$ )**

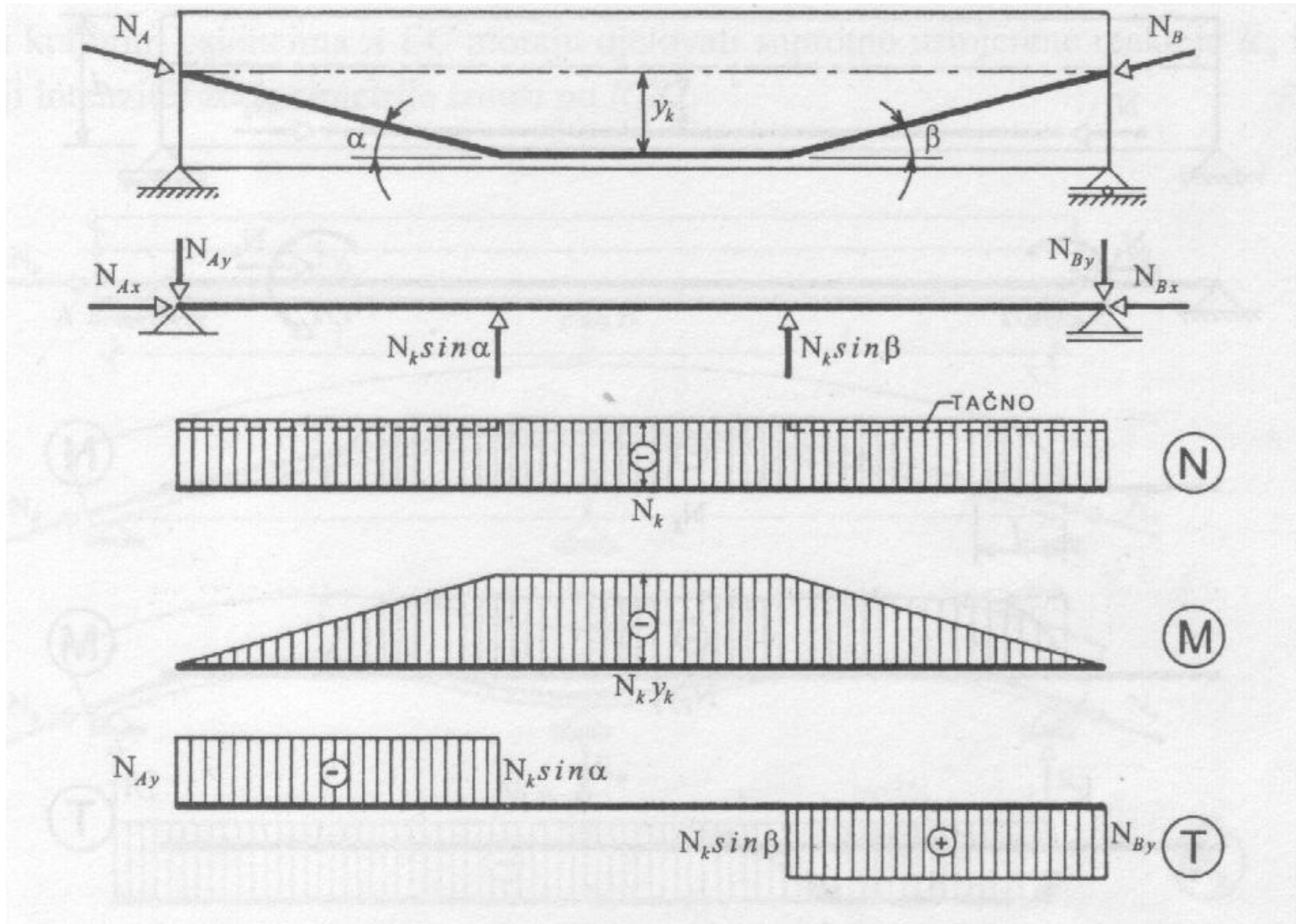


Nosač i trasa kablova

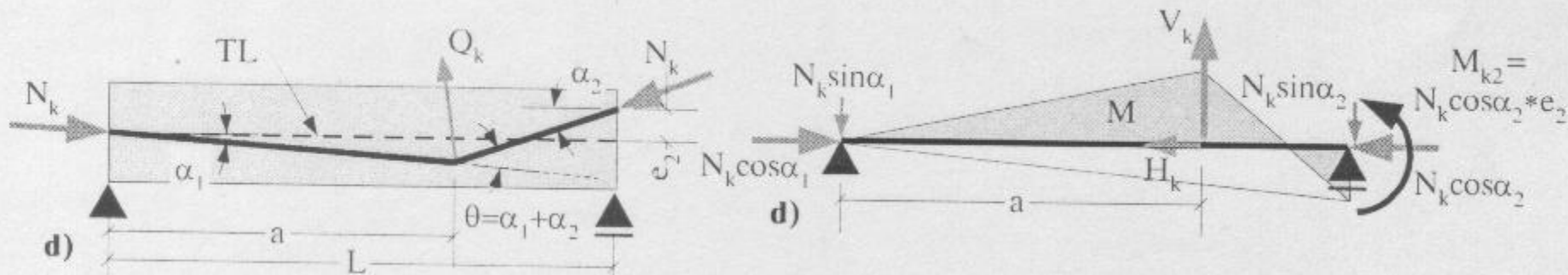
Izvor: V.Alendar, 2003.

Ekvivalentno opterećenje i dijagram momenata savijanja

**Poligonalna trasa kabela koja prolazi kroz težište presjeka na oba kraja nosača i sa različitim uglovima preloma trase**

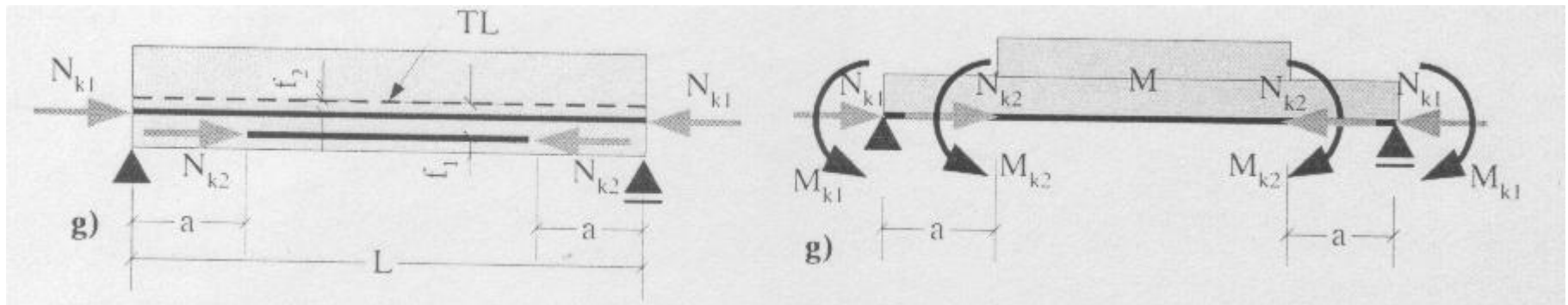


**Poligonalna trasa kabela koja prolazi kroz težište poprečnog presjeka na jednom kraju nosača i ima ekscentricitet  $e_2$  na drugom kraju**



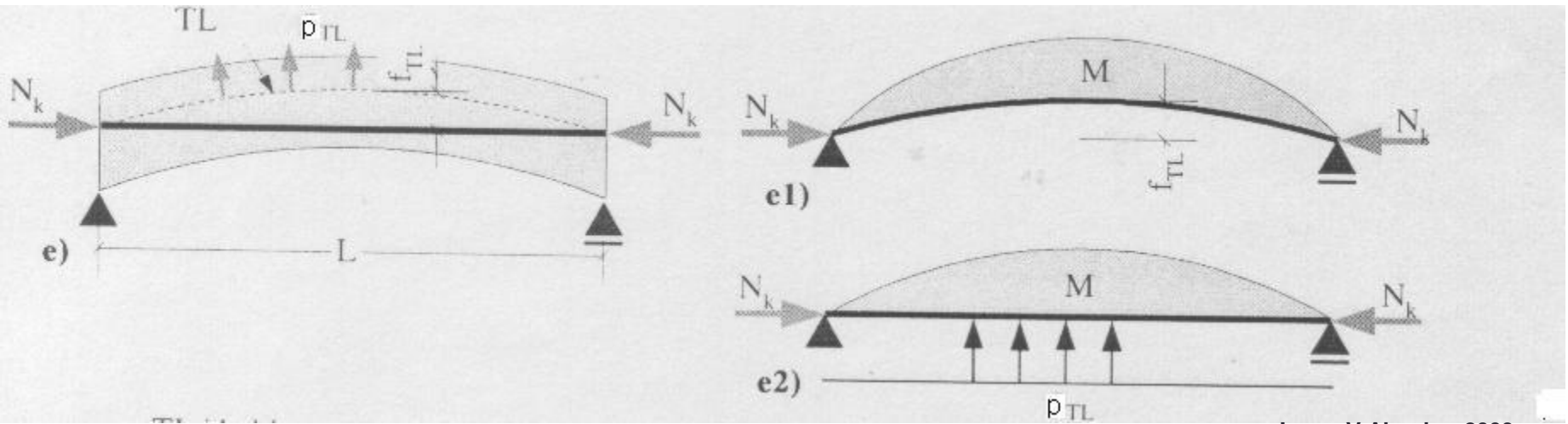
Izvor: V.Alendar, 2003.

**Dva pravolinijska kabela sa različitim ekscentricitetima, od kojih je jedan ankerovan u tačkama unutar raspona, a drugi na krajevima nosača**



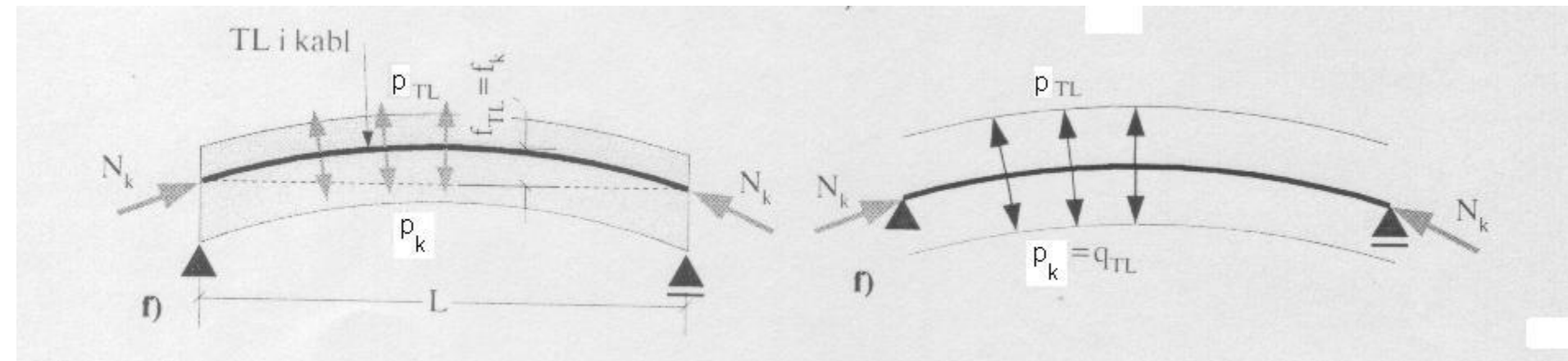
Izvor: V.Alendar, 2003.

## Pravolinijska trasa kabela i nosač sa krivolinijskom težišnom linijom



Izvor: V.Alendar, 2003.

## Parabolična trasa kabela i nosač sa paraboličnom težišnom linijom koje se međusobno poklapaju



Izvor: V.Alendar, 2003.

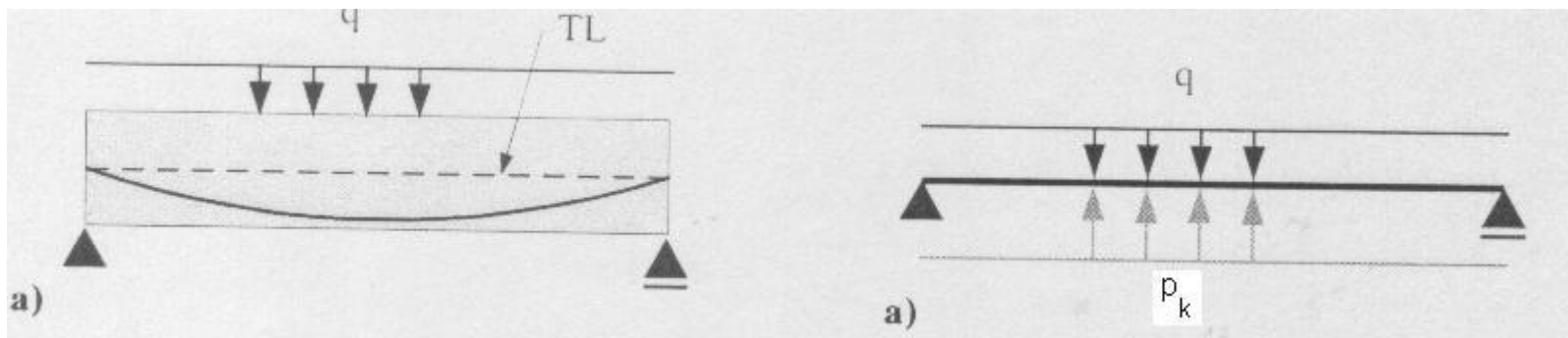


## Balansiranje spoljašnjeg opterećenja

Koristan aspekt analize ekvivalentnog opterećenja predstavlja mogućnost racionalnog izbora trase kablova i intenziteta sile prethodnog napreznjanja tako da se ekvivalentnim opterećenjem izbalansira spoljašnje opterećenje.

Mogućnosti balansiranja spoljašnjeg opterećenja prethodnim napreznjanjem na primjeru proste grede

Prosta greda opterećena jednako podijeljenim opterećenjem na savijanje se može prethodnim napreznjanjem dovesti u stanje aksijalno opterećene grede silom  $N_k$ .



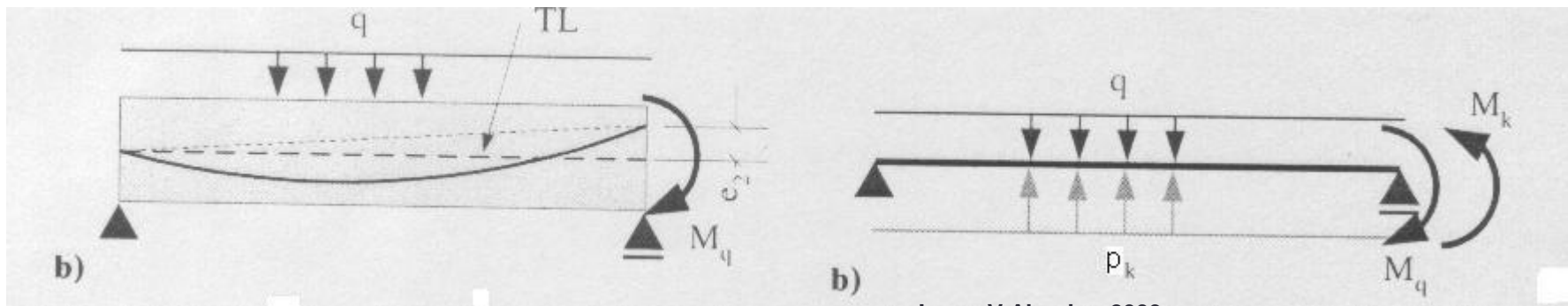
Izvor: V.Alendar, 2003.

$$p_k = \frac{8N_k f}{L^2}$$

$$M = \frac{p_k L^2}{8} = N_k f$$

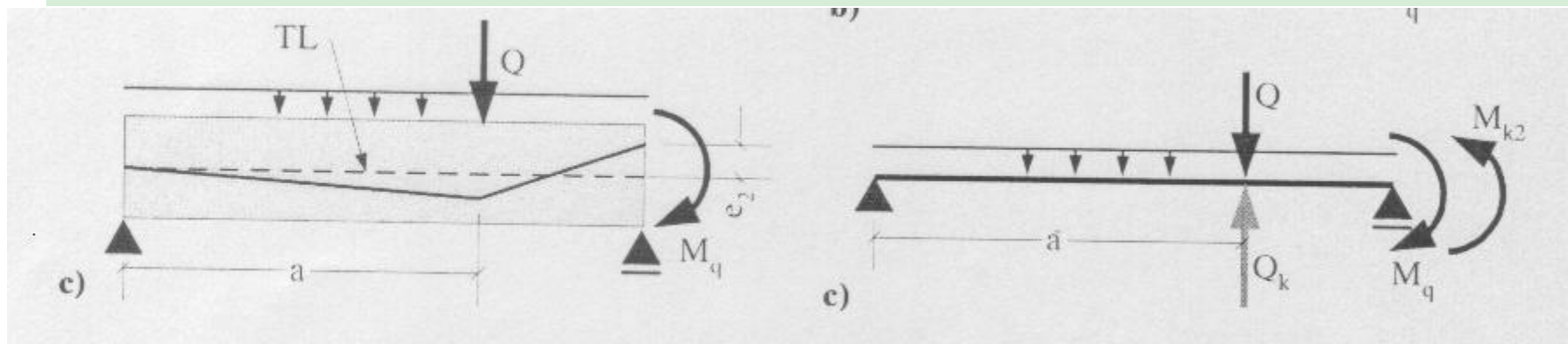
I za druge slučajeve opterećenja proste grede može se odabrati trasa kablova tako da se ekvivalentnim opterećenjem od prethodnog naprezanja balansira spoljašnje opterećenje.

Ako postoji koncentrisani moment na kraju proste grede – kablove treba postaviti sa ekscentricitetom na tom kraju tako da se dobije moment savijanja istog intenziteta i suprotnog smjera u odnosu na spoljašnji moment.



Izvor: V.Alendar, 2003.

Na mjestu dejstva koncentrisane spoljašnje sile postavlja se prelom trase kabla tako da se na tom mjestu od ekvivalentnog opterećenja dobije koncentrisana sila suprotnog smjera u odnosu na spoljašnju.

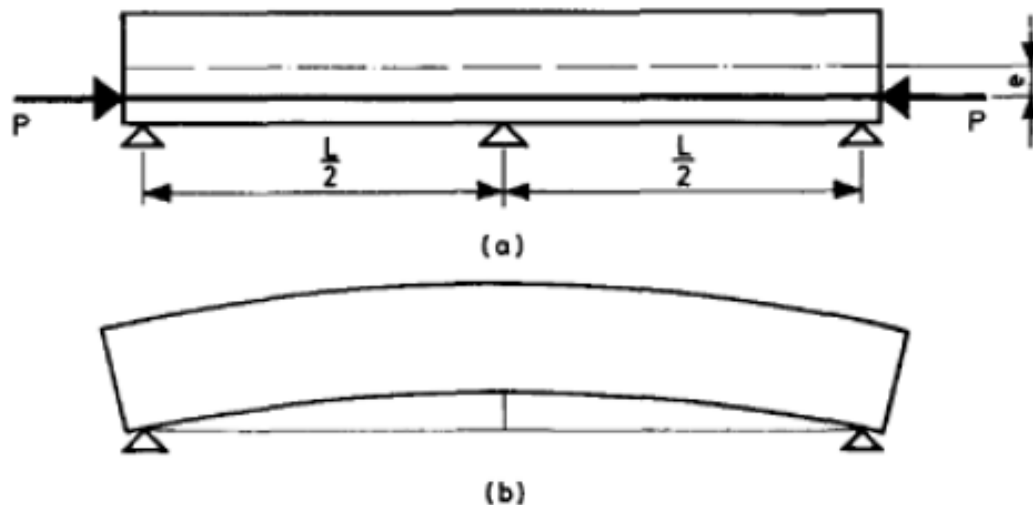


Izvor: V.Alendar, 2003.

## Statički neodređeni sistemi

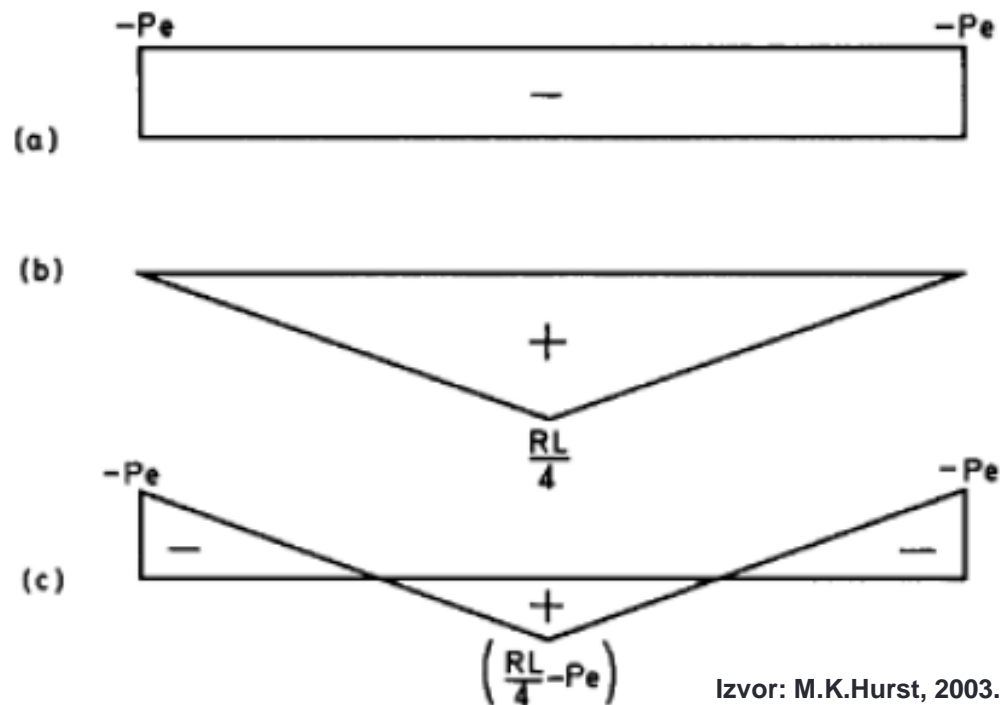
➤ Statički neodređeni elementi i konstrukcije imaju spriječena pomjeranja oslonaca, pa se prethodnim naprežanjem kod njih izazivaju reakcije oslonaca i dodatni (sekundarni) uticaji.

➤ Kao ilustracija pojave sekundarnih uticaja u prethodno napregnutim statički neodređenim nosačima, prikazana je kontinualna greda preko dva polja, raspona  $L$ , koja je prethodno napregnuta konstantnom silom  $P$  i ekscentricitetom  $e$ .

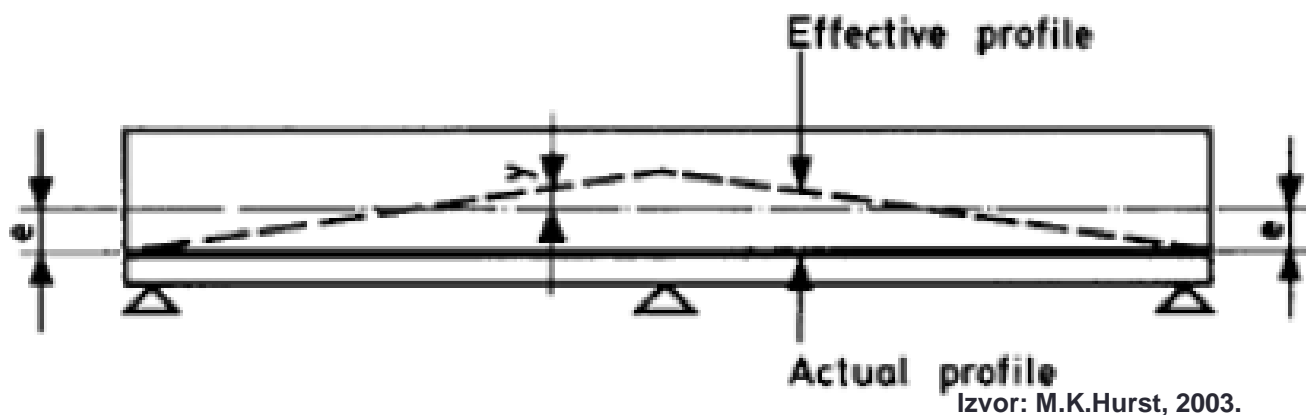


Ukoliko ne bi bilo spriječeno pomjeranje na mjestu srednjeg oslonca, nosač bi dobio deformisani oblik kao na slici b). Međutim, srednji oslonac sprječava pomjeranje i na tom mjestu javlja se reakcija  $R$ .

- Sila prethodnog naprezanja  $P$  na rastojanju  $e$  od težišta presjeka izaziva konstantan negativan moment savijanja duž nosača, intenziteta  $Pe$ , prikazan na slici a), (primarni moment).
- Reakcija oslonca  $R$  izaziva moment po linearnoj raspodjeli prikazan na slici b), maksimalne vrijednosti  $RL/4$ , (sekundarni moment).
- Zbirni moment, koji je rezultat prethodnog naprezanja kontinualnog statički neodređenog nosača, dobija se sabiranjem momenata a) i b), i dat je na slici c)



- Rezultujući moment od prethodnog naprezanja se u svakom presjeku duž nosača može izraziti kao proizvod sile prethodnog naprezanja  $P$  i kraka  $y$ .
- Veličina  $y$  predstavlja položaj sile pritiska od prethodnog naprezanja u odnosu na težište poprečnog presjeka nosača.
- Linija koja je definisana ordinatom  $y$  predstavlja efektivni profil sile prethodnog naprezanja.



- Izrazi za proračun prethodno napregnutih presjeka koji važe za statički određene nosače u kojima figuriše stvarni ekscentricitet sile prethodnog naprezanja  $e$ , mogu se primijeniti u slučaju statički neodređenih nosača, pri čemu se koristi efektivni ekscentricitet  $y$ .

## Numerički primjer:

Kontinualna greda preko dva polja, svako raspona po **10m**, prethodno je napregnuta po pravolinijskoj trasi silom  **$P=1500kN$** . Ekscentricitet je konstantan duž grede i iznosi  **$e=30cm$**  Odrediti raspodjelu rezultujućeg momenta duž nosača i reakcije oslonaca usljed prethodnog naprezanja.

Ukoliko nije spriječeno pomjeranje nad srednjim osloncem, moment od zadate sile prethodnog naprezanja je konstantan duž nosača i iznosi  **$Pxe=1500 \times 0,3=450kNm$** . Negativan ugib na mjestu srednjeg oslonca (na sredini ukupnog raspona od **20m**) se računa iz izraza:

$$\delta_M = ML^2/8EI \qquad \delta_M = 450 \cdot 20^2/8EI = 22500/EI$$

Ugib od reakcije srednjeg oslonca se računa iz izraza:

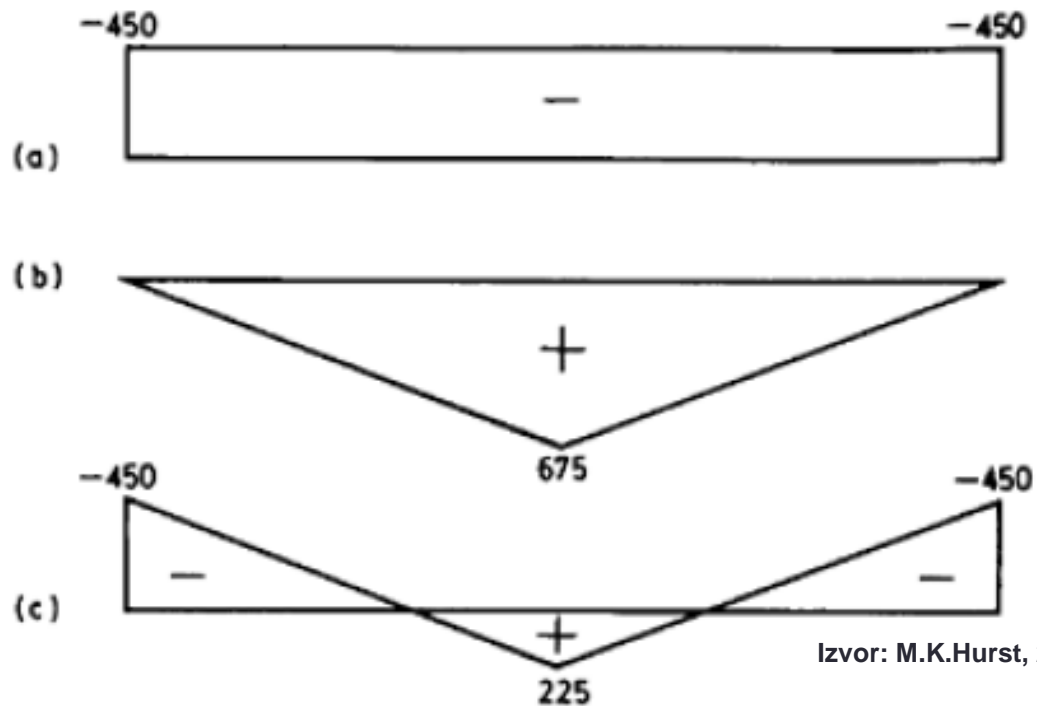
$$\delta_R = RL^3/48EI \qquad \delta_R = R \cdot 20^3/48EI = 166,7 \frac{R}{EI}$$

Izjednačavanjem vrijednosti  $\delta_M$  i  $\delta_R$ : dobija se reakcija srednjeg oslonca  $R=135kN$

Reakcije krajnjih oslonaca su jednake i iznose  $135/2= 67,5kN$ .

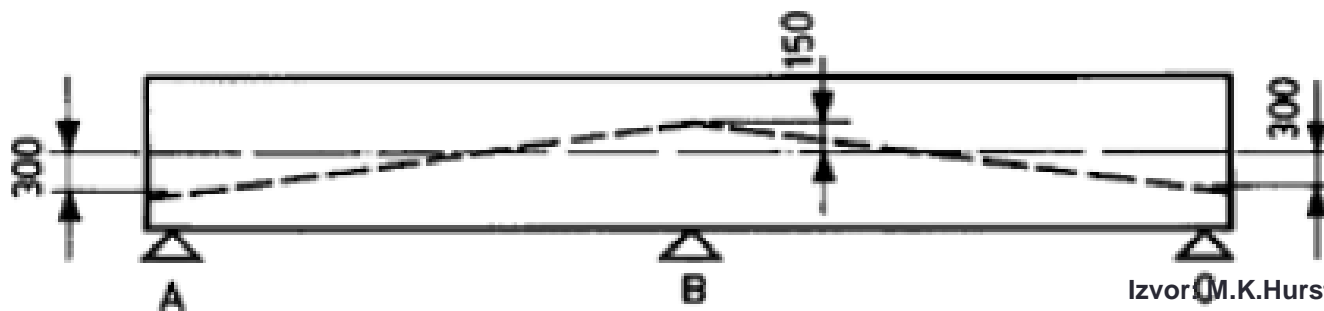
## Dijagrami momenata:

- a) Primarni
- b) Sekundarni
- c) Ukupni



Izvor: M.K.Hurst, 2003.

## Efektivni profil kablova:



Izvor: M.K.Hurst, 2003.

## Primjer 2: Greda sa spriječenim vertikalnim pomjeranjem na mjestu srednjeg oslonca prethodno napregnuta paraboličnim kablom

Ekvivalentno opterećenje proste grede je:

$$p_k = \frac{8N_k f}{L^2}$$

a odgovarajući moment:

$$M_k = \frac{p_k \cdot L^2}{8} = N_k f$$

Reakcija srednjeg oslonca kod kontinualnog nosača opterećenog jednako podijeljenim opterećenjem  $p_k$ :

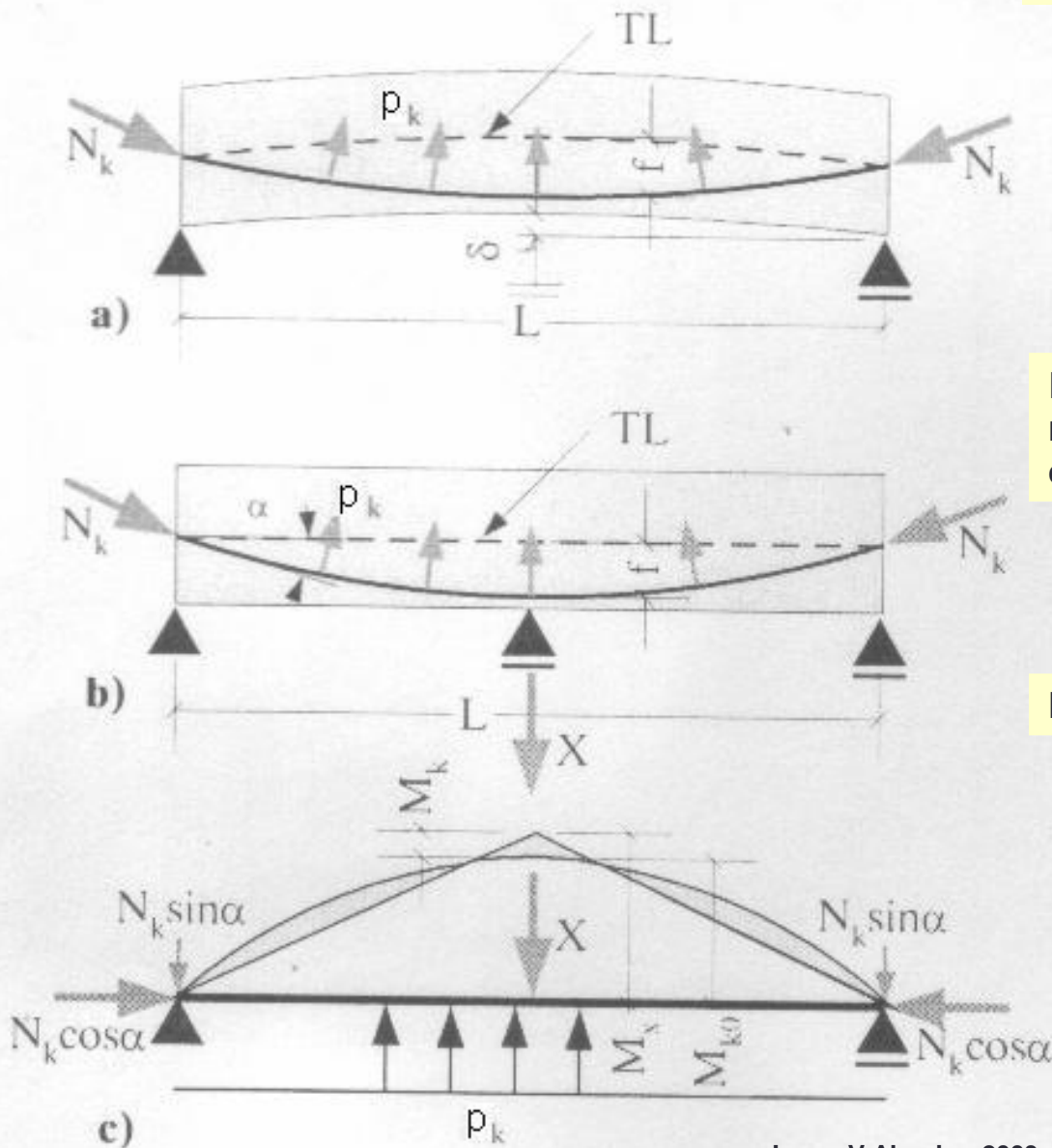
$$X = 0.625 p_k L = \frac{5p_k L}{8} = \frac{5N_k f}{L}$$

Moment savijanja od koncentrisane sile  $X$ :

$$M_x = \frac{X \cdot L}{4} = \frac{5N_k f}{L} \cdot \frac{L}{4} = \frac{5N_k f}{4}$$

Ukupan moment nad srednjim osloncem – zateže donju stranu:

$$M_x - M_k = \frac{N_k \cdot f}{4}$$





**Na primjerima kontinualnog nosača preko dva polja pokazano je da prethodno naprezanje kod statički neodređenih nosača izaziva sekundarne uticaje.**

**Kod analiziranih kontinualnih nosača trasa kablova je postavljena tako da se prethodnim naprezanjem balansira opterećenje proste grede. Zbog neadekvatnog odabira trase kablova sekundarni momenti su umanjili efekte prethodnog naprezanja koji bi bili postignuti istom silom prethodnog naprezanja po odgovarajućoj trasi.**

**Efektivna trasa kablova se dobija podizanjem ili spuštanjem aktuelne trase nad srednjim osloncima, zadržavajući postojeći oblik na dijelu između oslonaca.**

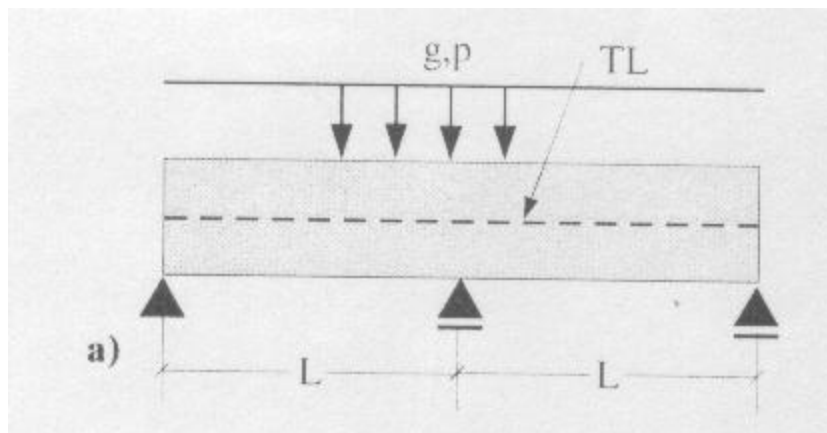
**Trasu kablova kod statički neodređenih nosača treba voditi prateći tok trajektorije napona zatezanja usljed spoljašnjih opterećenja.**

**Trase kablova kod statički neodređenih nosača ne mogu se uvijek odabrati tako da se ekvivalentnim opterećenjem u potpunosti balansira spoljašnje opterećenje.**

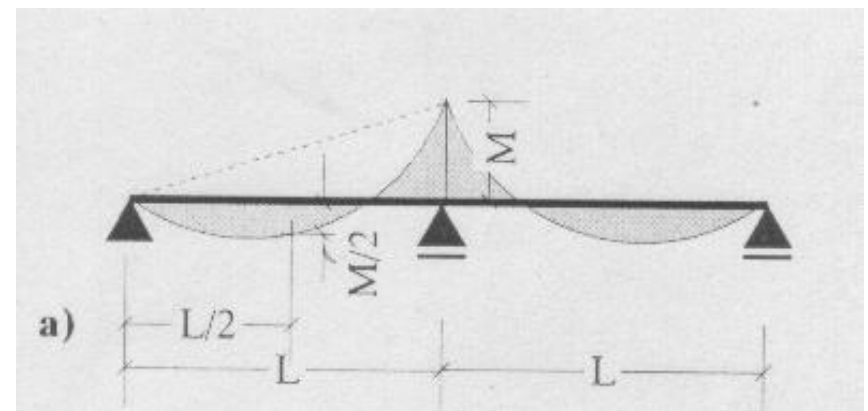
## Linearne transformacije i konkordantne trase

Može se pokazati da kod kontinualnih nosača sa paraboličnim kablovima momenti od prethodnog napreznja zavise samo od strijele kabla  $f$ , a ne zavise od ekscentriciteta kabla nad srednjim osloncima.

**Primjer:** Kontinualna greda na dva polja prethodno napregnuta paraboličnim kablom sa korigovanom trasom iznad srednjeg oslonca

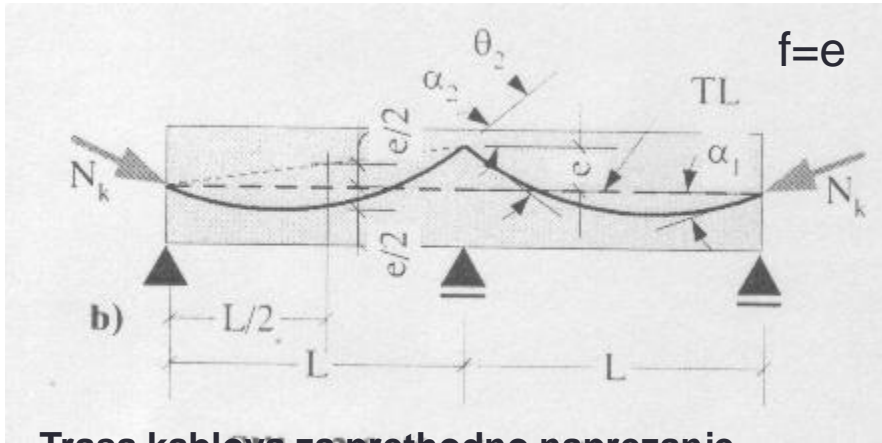


Kontinualna greda i opterećenje

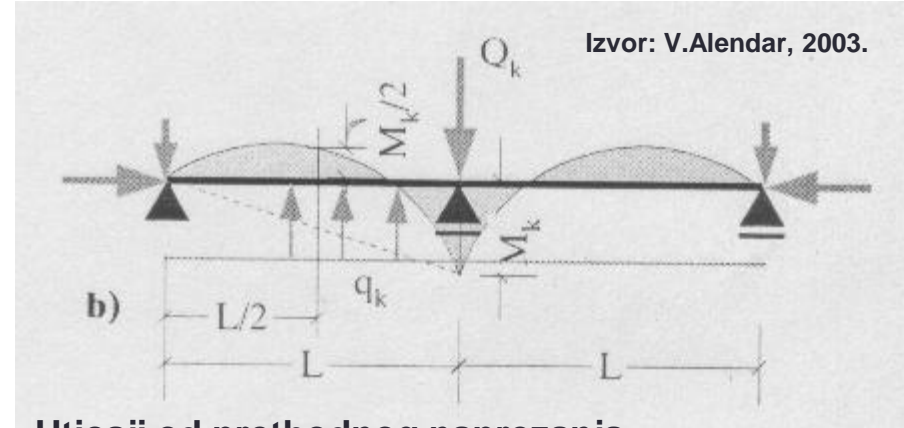


Momenti od spoljašnjeg opterećenja

## Proračun momenta nad srednjim osloncem, usljed prethodnog napreznjanja



Trasa kablova za prethodno napreznjanje



Uticaji od prethodnog napreznjanja

Podijeljeno skretno opterećenje je:

$$p_k = \frac{8N_k f}{L^2} = \frac{8N_k e}{L^2}$$

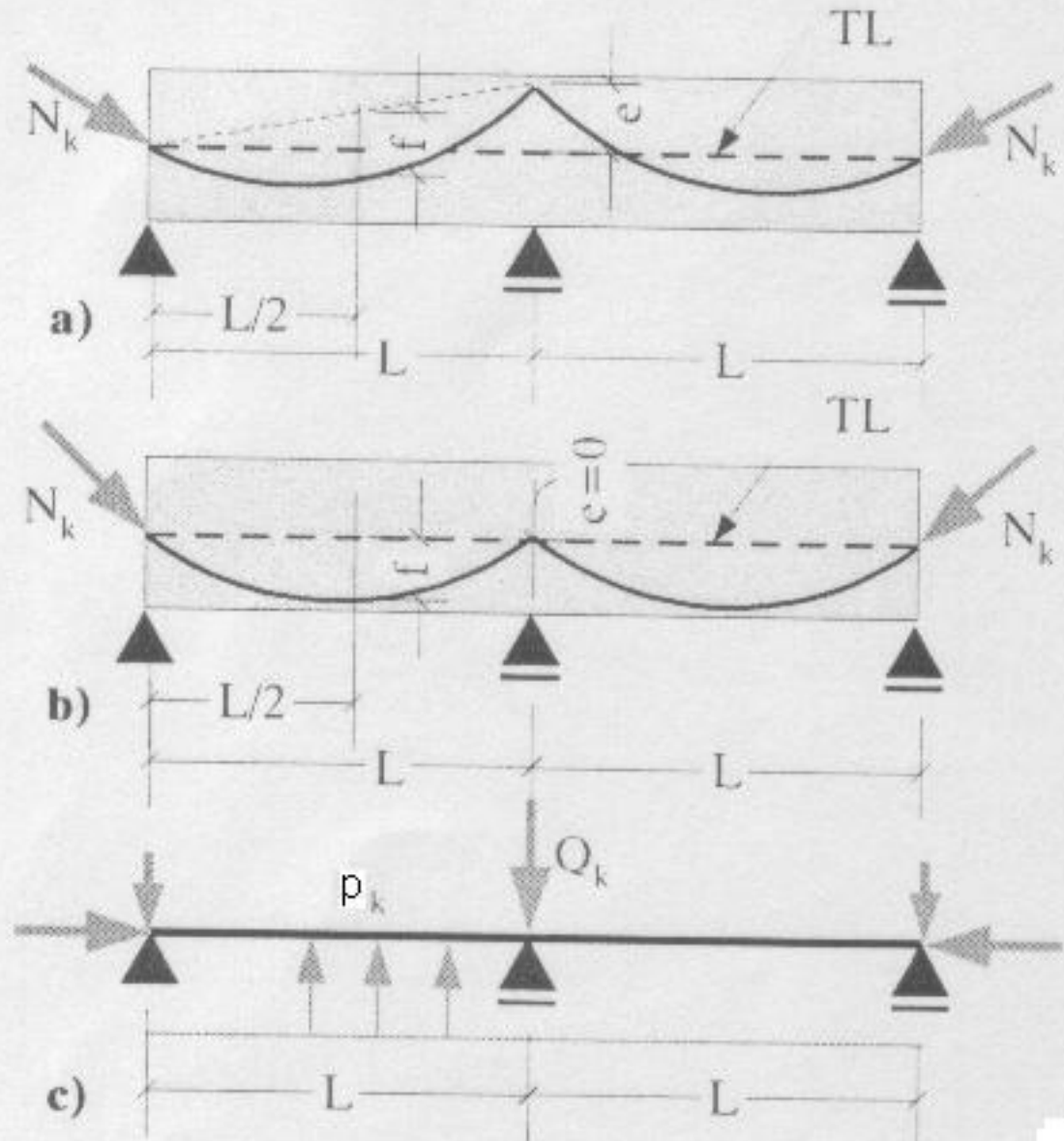
Reakcija srednjeg oslonca:

$$R_k = \frac{5p_k \cdot 2L}{8} = \frac{10}{8} p_k L = \frac{10N_k f}{L}$$

Moment nad srednjim osloncem:

$$M_k = \frac{R_k \cdot 2L}{4} - \frac{p_k \cdot (2L)^2}{8} = \frac{R_k \cdot L}{2} - \frac{p_k \cdot L^2}{2} = 5N_k f - 4N_k f = N_k f = N_k e$$

Na slici su prikazane dvije trase kablova kontinualnog nosača na dva polja sa različitim ekscentricitetom nad srednjim osloncem, istom silom  $N_k$  i strijelom  $f$ .



Ekvivalentno opterećenje od prethodnog naprezanja u oba slučaja ima iste efekte u pogledu momenata savijanja i ugiba. Razlikuju se samo komponente sile na krajevima nosača zbog promjene nagiba kablova.

## Zaključci

Plitke parabolične trase kablova sa strijelom jednakom ekscentricitetu kabla iznad srednjeg oslonca ne izazivaju reakcije oslonaca. Statički uticaji su jednaki uticajima u prostoju gredi raspona  $2L$  (kad se ukloni srednji oslonac).

Ukoliko se sila prethodnog naprezanja  $N_k$  i strijela  $f$  zadrže konstantnim, položaj kablova nad osloncem se može mijenjati bez uticaja na momente i ugibe od prethodnog naprezanja.

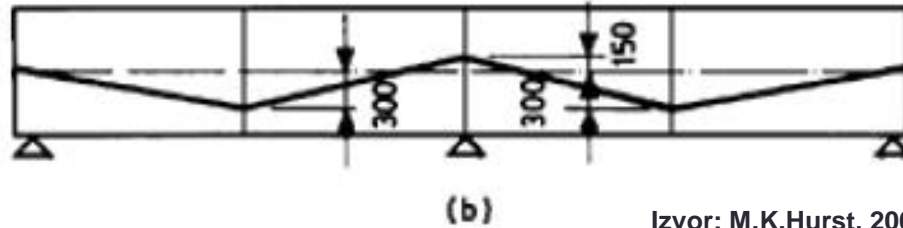
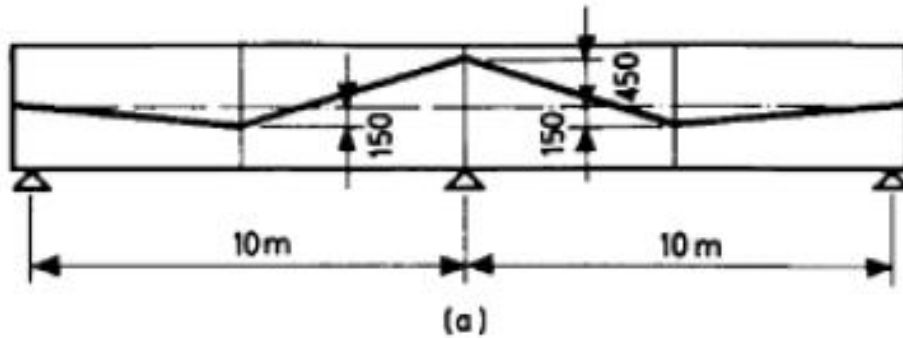
Pomjeranja položaja trase iznad srednjeg oslonca kontinualnog nosača se nazivaju **linearne transformacije**.

## Konkordantne trase

Trase kablova kod kojih su uticaji jednaki uticajima u statički određenim sistemima su konkordantne trase. Ove trase se mogu dobiti iz dijagrama momenata (afine su sa dijagramom momenata). **Kod statički određenih nosača trase su uvijek konkordantne.**

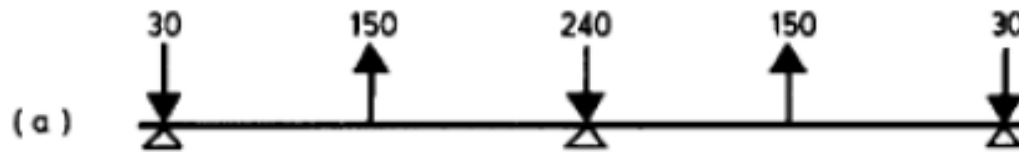
Konkordantne trase **ne daju optimalno rješenje** što se tiče balansa spoljašnjih uticaja u statički neodređenim nosačima. Često je racionalnije rješenje sa većim ekscentricitetom kablova jer je potrebna manja sila prethodnog naprezanja.

## Numerički primjer: Linearne transformacije trase



Izvor: M.K.Hurst, 2003.

Trasa kablova na slici b) je linearna transformacija trase na slici a).

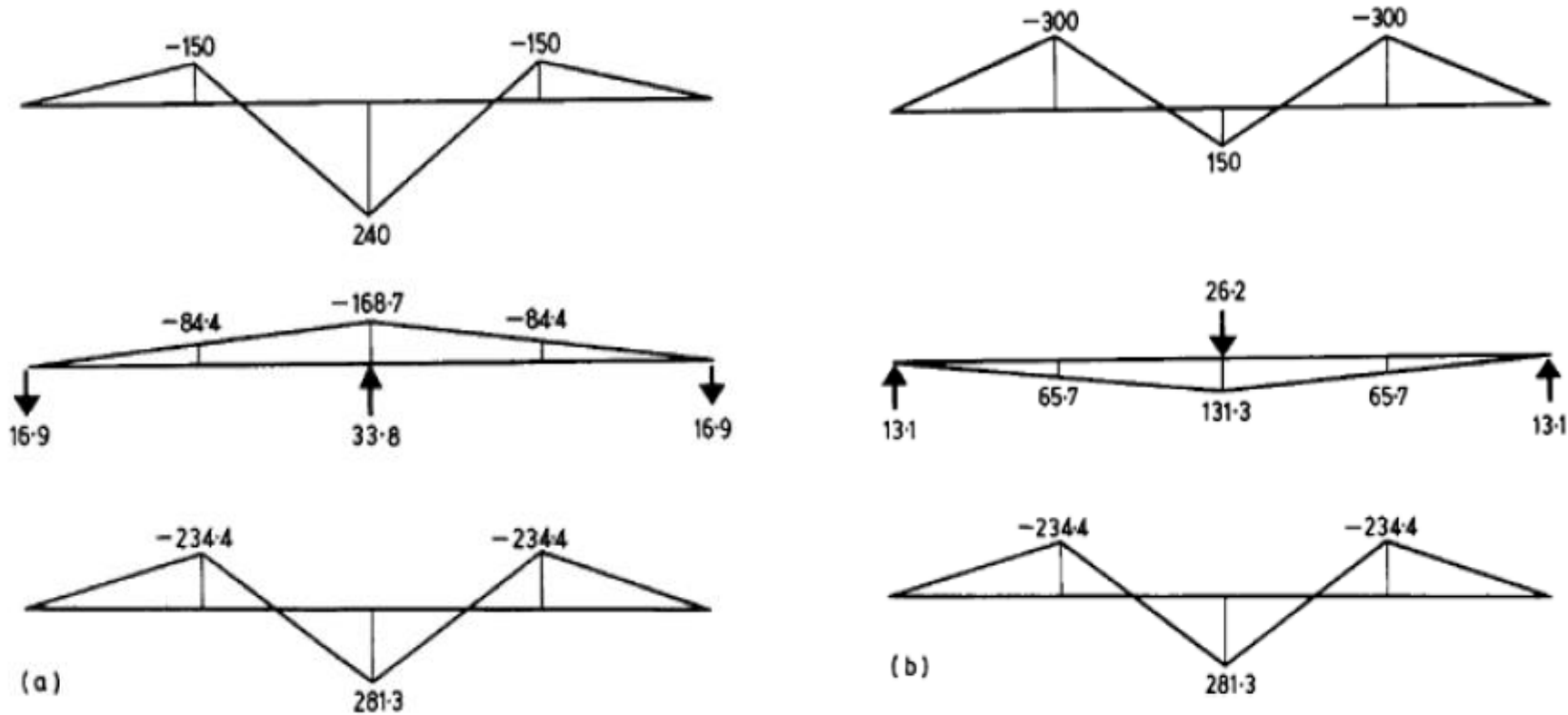


Izvor: M.K.Hurst, 2003.

Ekvivalentno opterećenje od prethodnog naprezanja duž raspona u oba slučaja je jednako. Zbog različitih nagiba kablova, reakcije oslonaca za različite grede se razlikuju.

Ekvivalentno opterećenje za date trase

## Raspodjela primarnog, sekundarnog i ukupnog momenta za posmatrane grede.



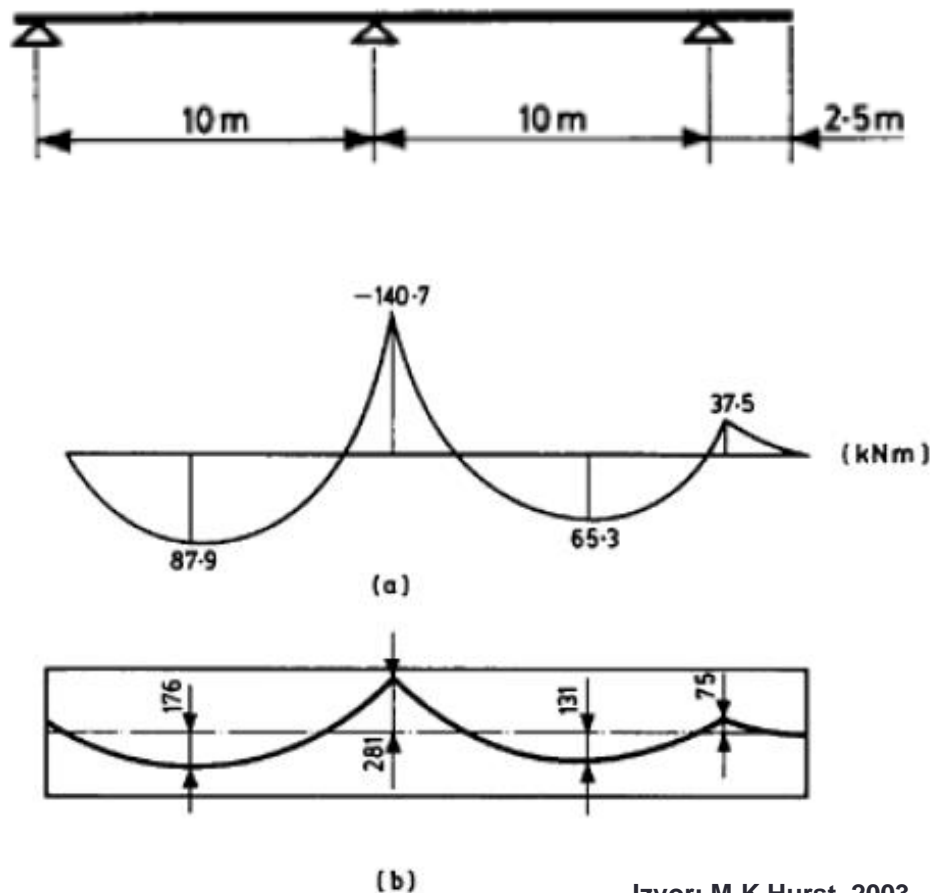
Izvor: M.K.Hurst, 2003.

Pošto su opterećenja duž raspona jednaka, jednaki su i ukupni momenti od prethodnog naprezanja.

Međutim, raspodjela primarnog i sekundarnog momenta, kao i reakcije oslonaca su različite u oba prikazana slučaja.

## Numerički primjer: Konkordantne trase

Odrediti konkordantnu trasu kablova za gredu prikazanu na slici, za silu prethodnog naprezanja 500kN. Jednako podijeljeno opterećenje grede je 12kN/m.



Dijagram momenata od zadatog jednako podijeljenog opterećenja grede je dat na slici a).

Ordinate trase kablova se dobijaju dijeljenjem momenta savijanja u svakom presjeku silom prethodnog naprezanja.

Rezultujući profil je prikazan na slici b).